

# Sur une méthode analytique de résolution de la conduction thermique dans les murs composites

JEAN GOSSE

Laboratoire de Thermique du CNAM, 292 rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03, France

(Received 25 November 1983)

**Résumé**—On a présenté et exploité antérieurement une méthode analytique qui généralise la méthode de Fourier par séparation des variables, dans le cas des murs composites. Recherchant une explication à partir de concepts physiques, on fait apparaître une signification nouvelle du nombre de Biot, en régime variable, comme la racine carrée du rapport de deux constantes de temps, et on éclaire le rôle de l'effusivité thermique,  $\sqrt{(\lambda\rho c)}$ .

## 1. INTRODUCTION

LA MÉTHODE classique des variables séparées applicable au cas de la conduction thermique variable dans un mur homogène peut être aisément généralisée à un mur composé de plusieurs couches à propriétés thermophysiques constantes [1]. Elle a été appliquée au cas des parois composites des fours intermittents [2] et au cas des fours de cuisson d'anodes en graphite [3, 4].

L'avantage de l'approche décrite dans les publications précitées est de réduire la part du traitement numérique par ordinateur à la seule recherche des valeurs propres, le reste de la solution étant purement analytique. Un autre avantage est l'utilisation de la matrice caractéristique  $2 \times 2$  de chaque tranche, de telle sorte que la matrice caractéristique du mur composite reste de dimension  $2 \times 2$  quel que soit le nombre de tranches. Contrairement à [5, 6], pour le calcul des valeurs propres, la dimension de la matrice ne croît pas lorsque le nombre de tranches augmente. Par contre, la méthode de séparation des variables ne peut représenter correctement le phénomène de conduction à un instant proche du déclenchement du régime variable sans recourir à un nombre élevé de valeurs propres. Mais il faut convenir qu'il n'y a pas de méthode sans sujétion particulière et qu'ici l'ordinateur n'a aucune peine à calculer plusieurs centaines de valeurs propres, s'il le faut, près de l'instant initial.

Après un bref rappel de la méthode, il sera montré que le nombre de Biot possède une signification autre que celle qui lui est assignée usuellement. On montre alors que pour un mur unique homogène, il n'est pas justifié d'admettre que la résistance thermique puisse être supposée nulle lorsque la capacité thermique reste finie. Ce nouvel éclairage permet de donner une interprétation physique de la procédure suivie dans le cas d'un mur composite et on propose une mise sous forme adimensionnelle logique de l'équation de base et donc des matrices caractéristiques des tranches. Dans ce texte, on voit le rôle particulier que joue l'effusivité thermique  $b'$  du matériau de chaque tranche, à côté de la diffusivité  $a'$ .

## 2. RAPPEL DE LA MÉTHODE DE FOURIER GENERALISÉE

Dans un mur composé de  $n$  tranches contiguës (Fig. 1) chaque tranche est caractérisée par les grandeurs suivantes: épaisseur  $e'_i$ , masse volumique  $\rho'_i$ , conductivité  $\lambda'_i$  et capacité massique  $c'_i$ . Les conductances surfaciques des faces extrêmes sont  $h'_1$  sur la première face et  $h'_n$  sur l'autre.

L'équation indéfinie de la chaleur dans la tranche  $i$  s'écrit :

$$\frac{\partial T'_i}{\partial t'} = a'_i \frac{\partial^2 T'_i}{\partial x'^2}. \quad (1)$$

Ne détaillons pas ce qui a déjà été écrit en [1-3]. Rappelons que la condition initiale est donnée :  $T'_i(x'_i, 0) = T'_i(x'_i)$ . D'autre part les conditions aux interfaces sont l'égalité des températures et celle des flux.

La température dans la tranche  $i$  est recherchée sous la forme :

$$T'_i(x'_i, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T'_{ik}(x'_i, t) \quad (2)$$

avec, en variables réduites  $x'_i$  et  $t$

$$T'_{ik}(x'_i, t) = e^{-\mu_k^2 t} [A'_{ik} \cos(\mu_k x'_i) + B'_{ik} \sin(\mu_k x'_i)]. \quad (3)$$

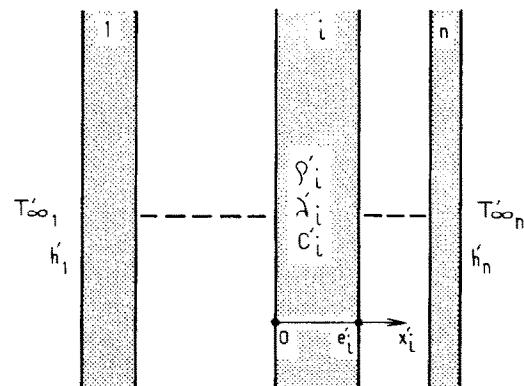


FIG. 1.

## NOMENCLATURE

$a'_i$	diffusivité thermique de la tranche $i$	Symboles grecs
$A'_{ik}, B'_{ik}$	coefficients de développement sur une base de fonctions propres, équation (3)	$\beta'_i$ groupement dimensionné, équation (4), $\sqrt{a'_1 b'_i / e'_1}$
$b'_i$	effusivité du matériau de la tranche $i$ , $\sqrt{(\lambda'_i c'_i \rho'_i)} = b'_i$	$\beta_i$ groupement adimensionnel, $\beta'_i / H'$
$\tilde{b}'_i$	effusivité du matériau de la tranche transposée $i$	$\eta'_{ik}, \zeta'_{ik}$ éléments dimensionnés du produit, limité à $i$ , des matrices caractéristiques des tranches
$Bi$	nombre de Biot	$\Theta_i$ température réduite
$c'_i$	chaleur massique de la tranche $i$	$\lambda'_i$ conductivité thermique de la tranche $i$
$C'_i$	capacité thermique de la tranche $i$ , $\rho'_i c'_i e'_i$	$\lambda'_i$ conductivité thermique de la tranche $i$ équivalente, $(a'_1 / a'_i)^{1/2} \lambda'_i$
$e'_i$	épaisseur de la tranche $i$	$\mu_k$ valeur propre (sans dimension)
$\tilde{e}'_i$	épaisseur transposée de la tranche $i$ équivalente, $(a'_1 / a'_i)^{1/2} e'_i$	$\rho'_i$ masse volumique de la tranche $i$
$h'_1, h'_n$	conductances surfaciques sur les faces extrêmes	$\tau_c$ constante de temps interne, $e'^2 / a'$
$H'$	conductance interne du mur composite, $1 / \Sigma (e'_i / \lambda'_i)$	$\tau_s$ constante de temps à la surface, $(b' / h')^2$
$R'_i$	résistance thermique de la tranche $i$ , $e'_i / \lambda'_i$	$\Phi'_i$ densité de flux dans la tranche $i$ , équation (4)
$t', t$	temps réel et temps réduit, $t = a'_1 t' / e'^2$	$\Phi_i$ densité de flux réduite, $-\beta_i (\partial \Theta_i / \partial x_i)$
$T'_i(x'_i, t')$	température au point $x'_i$ de la tranche $i$ , à l'instant $t'$	$\chi_{ik}, \zeta_{ik}$ éléments adimensionnels du produit, limité à $i$ , des matrices caractéristiques des tranches.
$T'_{\infty 1}, T'_{\infty n}$	températures ambiante loin des faces extrêmes	Indices
$x'_i$	abscisse dans la tranche $i$	$i$ relatif à une tranche
$x_i$	abscisse réduite, $x'_i / \tilde{e}'_i$	$k$ relatif à la valeur propre de rang $k$ .

Les  $A'_{ik}$  et  $B'_{ik}$  doivent vérifier la condition initiale. Le flux thermique associé est évidemment :

$$\Phi'_{ik}(x_i, t) = \mu_k \beta'_i e^{-\mu_k \tilde{e}'_i t} [A'_{ik} \sin(\mu_k x_i) - B'_{ik} \cos(\mu_k x_i)]. \quad (4)$$

Les conditions de raccordement aux interfaces conduisent à :

$$\begin{bmatrix} T'_{ik}(e_i, t) \\ \Phi'_{ik}(e_i, t) \end{bmatrix} = [\Gamma'_{i,k}] \begin{bmatrix} T'_{1k}(0, t) \\ \Phi'_{1k}(0, t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

avec

$$\begin{aligned} [\Gamma'_{i,k}] &= \begin{bmatrix} \xi_{ik} & \eta'_{ik} \\ \zeta'_{ik} & \chi_{ik} \end{bmatrix} \\ &= \prod_i^1 \begin{bmatrix} \cos(\mu_k e_j) & -\frac{\sin(\mu_k e_j)}{\mu_k \beta'_j} \\ \mu_k \beta'_j \sin(\mu_k e_j) & \cos(\mu_k e_j) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Le respect des conditions aux limites exige :

$$h'_n(\xi_{nk} - h'_1 \eta'_{nk}) = \zeta'_{nk} - h'_1 \chi_{nk}. \quad (7)$$

Cette relation (7) permet de calculer, par utilisation de l'ordinateur, la suite des valeurs propres  $\mu_k$ . Mis à part cette séquence, la méthode de résolution est entièrement analytique comme dans le cas d'un mur unique homogène.

Il faut noter que dans (6), on ne considère qu'un mur composé de  $n$  tranches : la matrice caractéristique du mur est le produit des matrices caractéristiques des tranches. Mais il n'y a aucune difficulté pour tenir compte d'une résistance de contact  $R'$  ( $\text{m}^2 \text{ K W}^{-1}$ ) aux interfaces en introduisant, au bon endroit, la matrice

$$\gamma_R = \begin{bmatrix} 1 & -R' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Par contre, la méthode n'est pas compatible avec l'introduction d'une tranche dont la résistance thermique serait nulle mais à capacité thermique finie. Il sera montré qu'une telle hypothèse conduit à supposer que le matériau constitutif de la tranche possèderait une effusivité thermique infinie et qu'elle n'est pas réaliste. La justification est facilitée par une nouvelle interprétation du nombre de Biot.

### 3. SIGNIFICATION NOUVELLE DU NOMBRE DE BIOT

La propagation dans une ligne électrique sans self, à capacité et résistance uniformément réparties, est conditionnée par deux groupements particuliers  $R'C'$  et  $R'/C'$ . En exploitant l'analogie entre conduction électrique et conduction thermique, on peut dire qu'il en est de même dans le cas d'un mur homogène pour

lequel  $R' = e'/\lambda'$  est la résistance thermique et  $C' = \rho' c' e'$  est la capacité thermique, toutes deux rapportées à l'unité de surface de mur ( $\text{m}^2$ ).

Or on constate que

$$R' C' = e'^2 / a' \quad \text{et} \quad R'/C' = 1/b'^2. \quad (10)$$

Le premier groupement n'est autre que la constante de temps sur laquelle est construit le temps réduit (appelé encore nombre de Fourier). Il n'y a rien de nouveau sur ce point. D'autre part—et ceci est inédit—l'effusivité thermique apparaît comme la racine carrée du rapport de la capacité à la résistance thermique du mur homogène :

$$b' = \sqrt{(C'/R')}.$$

Dire qu'un mur possède une grande effusivité thermique c'est dire que le rapport de la capacité à la résistance est élevé.

A partir de cette remarque il est possible, prenant comme variables caractéristiques du matériau la diffusivité  $a'$  et l'effusivité  $b'$ , de faire apparaître une autre signification du nombre de Biot, dans le cas de la conduction en régime variable :

$$Bi = h' e' / \lambda' = (e'/\sqrt{a'}) / (b'/h').$$

Ainsi le nombre de Biot est la racine carrée de deux constantes de temps

$$Bi = \sqrt{(\tau_c / \tau_s)}$$

où  $\tau_c = e'^2 / a'$  est la constante de temps interne classique et où  $\tau_s = (b'/h')^2$  est une constante de temps qui caractérise le phénomène thermique à la surface du mur. Cette constante de temps  $\tau_s$  est grande si la conductance  $h'$  est faible par rapport à l'effusivité du matériau, propriété qui est, rappelons-le, indépendante de l'épaisseur du mur. La température imposée sur une face ( $h'$  infiniment grand) est interprétable par la constante de temps  $\tau_s$  nulle.

Selon l'image classique de la conduction en régime permanent,  $Bi$  très petit signifie que la conductance surfacique est très faible par rapport à la conductance interne. Cela signifie aussi en conduction variable, que la constante de temps interne est très petite par rapport à la constante de temps de surface.

Soit un mur homogène d'épaisseur  $e'$  avec conductances surfaciques  $h'_1$  et  $h'_n$  sur les faces ; compte tenu de la matrice caractéristique élémentaire définie en (6), les valeurs propres  $\mu_k$  sont les racines de (7) qui s'écrit :

$$Bi_n \left( \cos \mu_k + Bi_1 \frac{\sin \mu_k}{\mu_k} \right) = \mu_k \sin \mu_k - Bi_1 \cos \mu_k \quad (11)$$

relation dans laquelle  $Bi_1$  et  $Bi_n$  sont les nombres de Biot relatifs à  $h'_1$  et  $h'_n$  car ici  $\beta' = \sqrt{a' b' / e'}$  et, par exemple,  $h'_1 / \beta' = Bi_1$ .

#### 4. CAS D'UNE PLAQUE MINCE HOMOGENE

Il a été dit précédemment que le nombre de Biot tend vers zéro lorsque, la constante de temps interne restant

constante, la conductance surfacique  $h'$  tend vers zéro. Mais, l'analyse n'est pas aussi simple lorsque l'épaisseur du mur tend vers zéro : il est habituel en effet de dire que le nombre de Biot tend vers zéro parce que la résistance interne ( $e'/\lambda'$ ) devient extrêmement faible,  $h'$  restant constant. Le problème est alors traité en admettant que la résistance interne est négligeable et que le phénomène est uniquement régi par la capacité thermique de la plaque. Cette approche est très restrictive car elle ne s'applique qu'aux matériaux possédant une effusivité  $b'$  infiniment grande.

Dans la réalité, les métaux ont une forte effusivité, mais celle-ci reste finie et en toute rigueur pour un matériau réel il n'est pas logique que  $R'$  tende seul vers zéro :  $C'$  aussi, puisque  $b' = \sqrt{(C'/R')}$ .

On va donc reprendre l'analyse en admettant que la plaque mince peut être modélisée par un quadripôle en  $t$  comportant une résistance  $R'/2$  de part et d'autre de la capacité  $C'$ . Recherchant une solution de température variant exponentiellement en fonction du temps  $\exp(-\mu^2 t)$  avec  $t = a' t' / e'^2$ , la matrice caractéristique de la plaque est :

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 - (\mu^2/2) & -R' [1 - (\mu^2/4)] \\ \mu^2 / R' & 1 - (\mu^2/2) \end{bmatrix} \quad (12)$$

avec  $R' = e'/\lambda'$  et, entre les deux faces de la plaque

$$\begin{bmatrix} T'(e', t) \\ \phi'(e', t) \end{bmatrix} = [\gamma] \begin{bmatrix} T'(0, t) \\ \phi'(0, t) \end{bmatrix}.$$

La condition (7) conduit à la valeur unique de  $\mu^2$ , soit si  $h'_1$  et  $h'_n$  sont les conductances sur les deux faces :

$$\mu^2 = \frac{R'(h'_1 + h'_n) + h'_1 h'_n R'^2}{1 + (R'/2)(h'_1 + h'_n) + h'_1 h'_n (R'^2/4)}.$$

En introduisant les nombres de Biot construits sur  $h'_1$  ou  $h'_n$  et  $(\lambda'/e')$ , on obtient :

$$\mu^2 = \frac{Bi_1 + Bi_n + Bi_1 Bi_n}{1 + (Bi_1 + Bi_2)/2 + (Bi_1 Bi_n/4)}. \quad (13)$$

Pour illustration, considérons le cas de la plaque mince qui, initialement à la température uniforme  $T'_0$  est brusquement soumise sur la première face à la température  $T'_{1\infty}$  à travers la conductance surfacique  $h'_1$ , l'autre face étant en contact avec l'ambiance à  $T'_{n\infty}$  à travers  $h'_n$ . La variation de température est donné par :

$$\frac{T'(x, t) - T'_{1\infty}}{T'_{1\infty} - T'_{n\infty}} = \left[ \frac{T'_0 - T'_{1\infty}}{T'_{1\infty} - T'_{n\infty}} + K' \left( \frac{1}{h'_1} + \frac{e'}{\lambda'} x \right) \right] \times e^{-\mu^2 t} - K' \left( \frac{1}{h'_1} + \frac{e'}{\lambda'} x \right)$$

en posant  $x = x'/e'$  ( $0 \leq x \leq 1$ )

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{h'_n} + \frac{1}{h'_1} + \frac{e'}{\lambda'},$$

avec  $\mu^2$  donné par (13).

L'approximation d'une résistance thermique interne nulle conduirait à une autre valeur de  $\mu^2$ , soit  $\mu^2 = Bi_1 + Bi_n$ , et à une température uniforme dans la

plaqué. Mais ceci ne repose pas sur une base logique puisque  $C'$  tend vers zéro en même temps que  $R'$ , leur rapport restant constant pour un matériau donné.

## 5. PROPRIETES DA LA METHODE DE FOURIER GENERALISEE

L'idée au centre de la note [1] est de transposer le problème de la conduction dans le mur composite réel en remplaçant celui-ci par un mur fictif dont toutes les tranches auraient la même diffusivité, celle de la première tranche  $a'_1$  (choisie arbitrairement). Moyennant quoi on définit un temps réduit unique  $t$ , commun à toutes les tranches, et l'équation de la chaleur (1) s'écrit partout

$$\frac{\partial T'_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 T'_i}{\partial x_i^2}$$

à condition de transposer les abscisses réelles  $x'_i$  en  $\tilde{x}'_i$ , donc les épaisseurs  $e'_i$  en

$$\tilde{e}'_i = (a'_1/a'_i)^{1/2} e'_i$$

c'est-à-dire dans la proportion inverse de la racine carrée des diffusivités, ce qui revient à conserver inchangée la constante de temps interne de la tranche  $i$ .

On peut vérifier que la tranche fictive possède une conductivité transposée

$$\tilde{\lambda}'_i = (a'_1/a'_i)^{1/2} \lambda'_i$$

mais que l'effusivité demeure inchangée car

$$\tilde{b}'_i = \tilde{\lambda}'_i / \sqrt{a'_1} = b'_i.$$

Ainsi le problème transposé concerne un mur dont les tranches auraient toutes la même diffusivité, des conductivités différentes mais qui garderaient inchangées leurs résistances et capacités thermiques respectives, donc les constantes de temps internes et superficielles.

## 6. CAS D'UN MUR COMPOSITE AVEC DES TRANCHES AYANT DES RESISTANCES ET DES CAPACITES EGALES

Considérons un mur qui possèderait  $n$  tranches ayant toutes des résistances et des capacités égales mais qui ne seraient pas faites du même matériau. Cette hypothèse se traduit par les groupements  $R'_i C'_i$  et  $R'_i / C'_i$  indépendants de la tranche  $i$  considérée. D'après (10) toutes les tranches ont même effusivité  $b'$  et même constante de temps interne; dans chaque tranche, l'épaisseur  $e'_i$  est proportionnelle à  $\sqrt{a'_i}$  ou, ce qui revient au même, à  $\lambda'_i$ .

Il résulte des définitions de  $e'_i$  et de  $\beta'_i$  que  $e'_i = (R'_i C'_i / R'_1 C'_1)^{1/2}$  est partout égal à l'unité et que  $\beta'_i = b' / (R'_i C'_i)^{1/2}$  est constant et égal à la valeur correspondant à la première tranche prise pour référence; ainsi

$$\beta'_i = \lambda'_1 / e'_1 = \beta'.$$

Dans ces conditions, toutes les tranches ont même

matrice caractéristique

$$[\gamma'_{ik}] = \begin{bmatrix} \cos \mu_k & -\frac{\sin \mu_k}{\beta' \mu_k} \\ \beta' \mu_k \sin \mu_k & \cos \mu_k \end{bmatrix}$$

et la matrice caractéristique du mur composé de  $n$  tranches, définie par (6), est tous calculs faits :

$$[\Gamma'_{i,k}] = \begin{bmatrix} \cos(n\mu_k) & -\frac{\sin(n\mu_k)}{\beta' \mu_k} \\ \beta' \mu_k \sin(n\mu_k) & \cos(n\mu_k) \end{bmatrix}.$$

La condition transcendante (7) à partir de laquelle sont calculées les valeurs propres  $\mu_k$ , s'écrit :

$$h'_n \left[ \cos(n\mu_k) + h'_1 \frac{\sin(n\mu_k)}{\beta' \mu_k} \right] = \beta' \mu_k \sin(n\mu_k) - h'_1 \cos(n\mu_k).$$

Posons  $u_k = n\mu_k$

$$1/H' = n(e_1/\lambda_1) = \Sigma(e_i/\lambda_i)$$

$$h_1 = h'_1/H' \quad \text{et} \quad h_n = h'_n/H'.$$

L'équation (12) devient :

$$h_n \left( \cos u_k + h_1 \frac{\sin u_k}{u_k} \right) = u_k \sin u_k - h_1 \cos u_k. \quad (14)$$

Comparons (11) pour un mur homogène et (14) pour le mur composite comme défini ici, les deux murs ayant même capacité globale, même conductance interne globale  $H'$  et mêmes conductances surfaciques  $h'_1$  et  $h'_n$ : pour le mur composite les valeurs propres seront  $n$  fois plus petites que celles du mur homogène.

Par exemple, prenons le cas de conductances surfaciques infinies, donc  $B_1$  et  $B_n$  infinis (températures imposées sur les faces); on sait que ceci se traduit par :

$$\cos \mu_k = 0 \quad \text{soit} \quad \mu_k = (2k+1)\pi/2$$

pour le mur homogène. On aura donc pour le mur composite à  $n$  tranches

$$\cos(n\mu_k) = 0 \quad \text{soit} \quad \mu_k = (2k+1)\pi/2n.$$

Le résultat n'est singulier qu'en apparence car, pour le mur composite, le temps réduit est construit sur la constante de temps interne de la première tranche. Pour le mur homogène, le temps réel est évidemment rapporté à la constante de temps du mur entier. On peut vérifier que les solutions pour le mur homogène et pour ce mur composite particulier ont le même terme exponentiel d'ordre  $k$ .

## 7. CHOIX LOGIQUE DE LA MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE

Il ressort du paragraphe précédent qu'il existe une façon rationnelle de construire les groupements adimensionnels, laquelle n'a pas été celle proposée antérieurement; dans [2], on comptait la résistance globale du mur composite en additionnant toutes les

résistances internes des tranches et celles surfaciques. On constate qu'il ne faut additionner que les résistances internes

$$1/H' = \Sigma(e'_i/\lambda'_i)$$

et réduire  $\beta'_i$  en prenant pour groupement adimensionnel

$$\beta_i = (a'_i/a'_i)^{1/2} \lambda'_i/(e'_i H').$$

Si  $\Phi_i$  est la température réduite en rapportant  $T'_i$  à une température de référence, et  $\Phi_i = -\beta_i(\partial\Theta/\partial x_i)$  le flux réduit

$$\begin{bmatrix} \Theta_{ik}(e_i, t) \\ \Phi_{ik}(e_i, t) \end{bmatrix} = [\Gamma_{i,k}] \begin{bmatrix} \Theta_{1k}(0, t) \\ \Phi_{1k}(0, t) \end{bmatrix} \quad (15a)$$

avec la matrice caractéristique adimensionnelle

$$\begin{aligned} [\Gamma_{i,k}] &= \begin{bmatrix} \zeta_{ik} & \eta_{ik} \\ \zeta_{ik} & \chi_{ik} \end{bmatrix} \\ &= \prod_{j=1}^i \begin{bmatrix} \cos(\mu_k e_j) & -\frac{\sin(\mu_k e_j)}{\mu_k \beta_j} \\ \mu_k \beta_j \sin(\mu_k e_j) & \cos(\mu_k e_j) \end{bmatrix} \quad (15b) \end{aligned}$$

les  $\mu_k$  étant les racines de

$$h_n(\zeta_{nk} - h_1 \eta_{nk}) = \zeta_{nk} - h_1 \chi_{nk} \quad (16a)$$

en posant

$$h_1 = h'_i/H' \quad \text{et} \quad h_n = h'_n/H'. \quad (16b)$$

Les équations du problème physique étant dimensionnellement homogènes, on peut les rendre adimensionnelles en choisissant une base quelconque de réduction, sans que la solution ne soit modifiée. Néanmoins, la réduction (15) et (16), qui a été posée dans [3, 4], a l'avantage d'une présentation rationnelle.

Signalons enfin que dans la comparaison de (16a) pour le mur composite, et (11) pour le mur homogène, il n'y a pas identité entre  $h_1$  et  $Bi_1$  comme entre  $h_n$  et  $Bi_n$ , si l'on donne aux nombres de Biot la signification liée aux constantes de temps (Section 3).

## 8. CONCLUSION

La résolution analytique de la conduction thermique dans les murs composites, par la généralisation de la méthode de Fourier, a orienté vers une nouvelle signification du nombre de Biot et de l'effusivité thermique pour un mur homogène : le nombre de Biot

apparaît comme la racine carrée du rapport de deux constantes de temps. La constante de temps à la surface fait intervenir la conductance surfacique externe et l'effusivité. Cette dernière est le groupement  $\sqrt{(\lambda' \rho' c')}$  caractéristique du matériau ; on peut aussi l'exprimer comme la racine carrée du rapport de la capacité thermique du mur homogène à la résistance thermique.

Il résulte de ces considérations que lorsque l'épaisseur d'un mur homogène tend vers zéro, le nombre de Biot tend aussi vers zéro, alors que reste constant le rapport de la capacité à la résistance. Par conséquent, il n'est pas pertinent, contrairement à ce qui est couramment dit, de supposer que la résistance devient négligeable et que la capacité joue un rôle prépondérant. On a montré comment opérer le passage à la limite pour respecter ce qu'impose l'effusivité.

Dans sa première présentation, la méthode de résolution dans un mur composite apparaissait comme un artifice basé sur le jeu d'un changement de variables. On montre ici que le mur réel est remplacé par un mur fictif dont toutes les tranches ont même diffusivité mais de telle sorte que les tranches deux à deux homologues, entre mur réel et mur fictif, aient des résistances et des capacités thermiques égales. Ce caractère original a suggéré une adaptation de la méthode au cas des enveloppes cylindriques ou sphériques, adaptation en cours d'exploitation.

*Dédicace*—Ce texte est présenté en hommage à Sir Owen Saunders à l'occasion de son quatre-vingtième anniversaire, en associant la mémoire du Professeur Gustave Ribaud (1884–1963), Membre de l'Institut de France, qui fut son collaborateur à IJmuiden.

## REFERENCES

1. J. Gosse, Sur la conduction thermique variable dans un mur composite à propriétés constantes, *C.R. Acad. Sci. Paris* **B286**, 303–306 (1978).
2. P. Duhamel et J. Gosse, Analyse thermique d'un mur composite soumis sur une face à une variation en crénaux de la température, *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**, 1663–1671 (1980).
3. M. Bouzidi, Thèse de 3ème cycle, Univ. Paris VI, Juin (1981).
4. M. Bouzidi and P. Duhamel, Study of the transient heat conduction regime in the composite wall of an anode firing furnace, 7th Heat Transfer Conf., Vol. 6, pp. 355–360 (1982).
5. M. Ozisik, *Heat Conduction*, Wiley, New York (1980).
6. M. Mikhailov, M. Ozisik and N. Vulchanov, Diffusion in composite layers with automatic solution of the eigenvalue problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, 1131–1141 (1983).

## ON AN ANALYTICAL METHOD FOR THE HEAT CONDUCTION IN COMPOSITE WALLS

**Abstract**—An analytical method which extends the Fourier separated variables method to the heat conduction in composite walls has been previously used. Seeking an explanation based on physical concepts, this paper gives a new meaning to the Biot number as the square root of the ratio of two time constants. The character of the heat absorption coefficient,  $\sqrt{(\lambda' \rho' c')}$ , is emphasized.

## EINE ANALYTISCHE METHODE ZUR LÖSUNG DER WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG IN GESCHICHTETEN WÄNDEN

**Zusammenfassung**—Eine analytische Methode, welche das Verfahren der Trennung der Variablen von Fourier für die Anwendung auf geschichtete Wände erweitert, wurde bereits in einer früheren Veröffentlichung beschrieben. In der vorliegenden Arbeit wurde auf der Suche nach einer physikalischen Begründung eine neue Deutung der Biot-Zahl als der Quadratwurzel aus dem Verhältnis zweier Zeitkonstanten gegeben und die Rolle der Wärmeleindringzahl  $\sqrt{(\lambda\rho c)}$ , erläutert.

## ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА, ПЕРЕДАВАЕМОГО ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ В СТЕНКАХ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Аннотация**—Для исследования передачи тепла теплопроводностью в стенках из композитных материалов ранее использовался аналитический метод разделения переменных Фурье. В результате поиска физического объяснения процесса в данной работе было найдено новое определение числа Био как корня квадратного из отношения двух временных постоянных. Отмечена роль коэффициента  $\sqrt{(\lambda\rho c)}$ .